Шифр: 11-14

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОБУ „Сертоловская СОШ №1"

Класс 11-Б

ФИО Лукьянов Александр Сергеевич

1/7 11-14

1	2	3	4	5	Σ
~~2~~	7	7	7	X	~~23~~
~~2~~ 4					~~23~~ 25

11.1

1) Рассмотрим как 77 представить в виде произведения двух различных целых чисел.

$77=1\cdot 77$ $\quad 77=(-1)\cdot(-77)$

$77=7\cdot 11$ $\quad 77=(-7)(-11)$

2) ~~Пусть n чисел~~ Запишем все n чисел так:

$k_1<k_2<k_3<\ldots<k_{n-1}<k_n$.

Между k_2 и k_{n-1} должно быть как можно больше чисел.

Из п.1 следует, что тогда $k_2=-7$; $k_{n-1}=7$.

3) Запишем n чисел, поставив между -7 и 7 все целые числа m, такие что $-7<m<7$

$-11; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 11$

Ответ: 17.

11.2 11-14 2/2

Докажем методом от противного.

Пусть существует $2n$ различных натуральных чисел, которые можно разбить на 2 ~~группы~~ ~~части~~ множества по n чисел так, что сумма в первом и во втором множестве будет равна n^2.

Заметим, что сумма всех $2n$ чисел будет равна $2n^2$.

Рассмотрим минимально возможную сумму всех $2n$ чисел (это сумма первых $2n$ натуральных чисел):

$$1+2+3+\ldots+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}=2n^2+n$$

Т.к. n – натуральное, то $\cancel{2n^2+n}$ $\cancel{2n^2}$ $\cancel{2n}$ $2n^2+n>2n^2$, а значит, сумма любых $2n$ нат. чисел больше, чем $2n^2$. Приходим к противоречию. Следовательно в множествах A и B есть одинаковое число.

Ч.Т.Д.

Например: $n=3$

~~$A\ \{1;4;5\}$~~

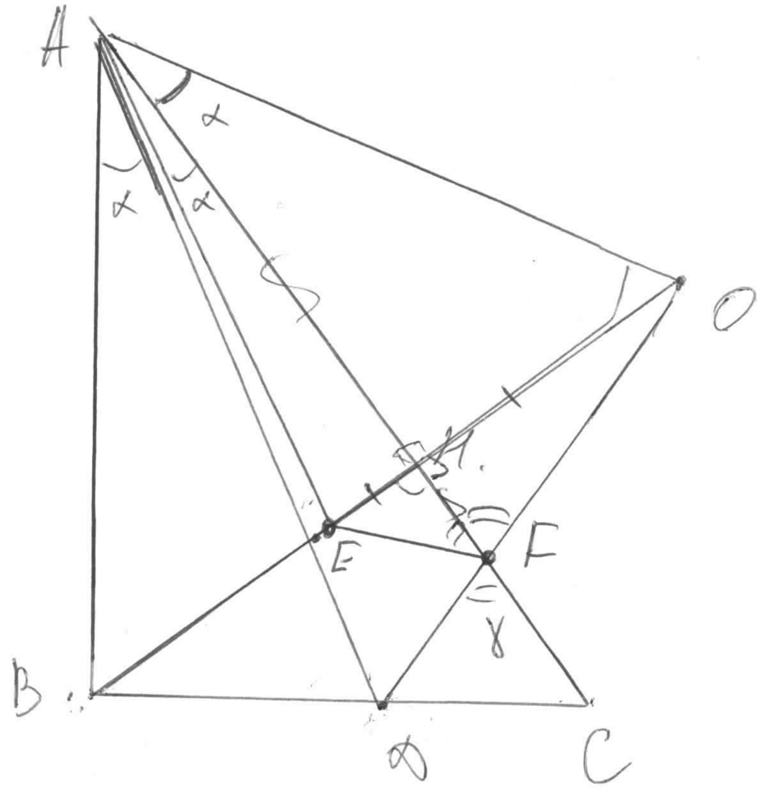
~~$B\ \{2;3;4\}$~~

$A\ \{1;3;5\}$

$B\ \{2;3;4\}$.

11-14 3/7

11. 3



1) Продлим BH и DF до пересечения.

$BH \cap DF = O$.

$\angle HFO = \angle DFC = \angle EFH$

$\triangle EHF = \triangle OHF$ по I признаку

$EH = HO$

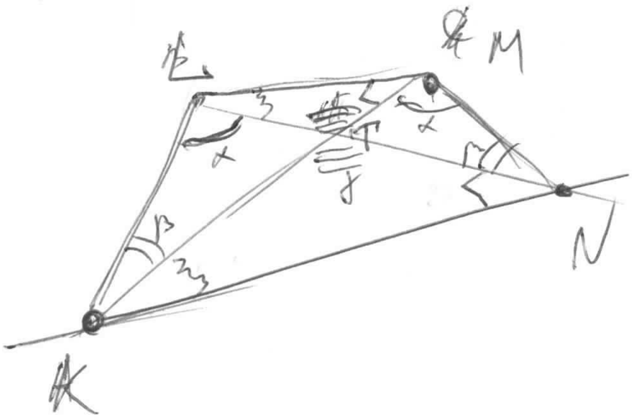
2) ~~Тогда $\triangle EAO$ AH является~~

$\triangle AHE = \triangle AHO$ по II признаку $\Rightarrow \angle HAO = \angle HAE$

$\angle HOA = 90° - \alpha$
$\angle BDA = 90° - \alpha$ $\Rightarrow$ вокруг AODB можно описать окружность,

т.к. если 2 равных угла опираются на ~~отрезок~~ один и тот же отрезок, при чём вершины углов лежат по одну сторону от него, то ~~вокруг~~ концы отрезка и вершины угла лежат на одной окружности. Докажем это.

4/7



Дано:
$\angle KLN = \angle KMN$.
M, L по одну сторону от KN.

Д-ть:
вокруг KLMN можно описать окружность.

1) $\angle LKN + \angle KNL = \angle MKN + \angle MNK$.

$\angle LKN - \angle MKN = \angle MNK - \angle KNL$.

$\angle LKM = \angle LNM$.

2) ~~$\angle KLM + \angle MNK =$~~

$\triangle LTK \sim \triangle MTK$.

$\frac{MT}{LT} = \frac{NT}{TK}$.

3) $\left.\begin{array}{l} \frac{MT}{LT} = \frac{NT}{TK} \\ \angle LTM = \angle KTN \end{array}\right| \Rightarrow \triangle LTN \sim \triangle KTN$

$\angle MLT = \angle TKN$

$\angle TNK = \angle TML$.

4) $(\angle KLN + \angle NLM) + (\angle MNL + \angle LNK) = (\angle LMK + \angle KMN) + (\angle LKM + \angle MK\ldots)$

$\angle KLM + \angle MNK = \angle LMN + \angle LKN$

$\Rightarrow$ вписан в окр.

ч.т.д.

---

3) $\angle ABD = \angle BOD$, т.к. вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

4) $\angle BOD = 90^\circ - \gamma$

$\angle ABD = \alpha$.

$\Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ$

5) $\angle AEF = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ч.т.д.

5/7

11.4.

$y \in N$
$p \in P$

~~1) Докажем, что все числа $py+1$ взаимно просты между собой при фиксированном p и $y < \frac{p}{2}$.~~

1) ~~Пусть~~ Пусть это не так и каждое число $py+1$ при $y = \{1, 2 \dots \frac{p-1}{2}\}$ представляется в виде произведения двух целых чисел, больших y. $py_i + 1 = b_{i_1} \cdot b_{i_2}$

2) Докажем, что одно и то же число не может участвовать в произведении py_1+1 и py_2+1 при $y_1 \neq y_2$

Пусть это не так. a_1 – общий множитель.

$a_1 \cdot a_3 = py_1 + 1$ $\quad y_1 > y_2$.

$a_1 \cdot a_2 = py_2 + 1$

$$\underbrace{a_1}_{>y_1}(a_3 - a_2) = p\underbrace{(y_1 - y_2)}_{<y_1}$$

Из условия следует, что $a_1 > y_1$, а $y_1 - y_2 < y_1$ потому что $y_2 > 0$.

$\Rightarrow$ $a_3 - a_2 < p$, иначе $(a_3 - a_2)a_1 > p(y_1 - y_2)$;

Это говорит $(a_3 - a_2) \not\vdots\, p$ о том, что $a_1 \vdots\, p$, но если это так, то

$a_1 \cdot a_3 \vdots\, p$ и $(py_1 + 1) \vdots\, p$

но это невозможно.

6/7

3) Значит, все числа $py+1$ представляются как $b_i \cdot b_{i_2}$, при этом одно и то же число b_k не участвует в представление двух различных чисел $py+1$ в виде произведения.

4) всего чисел $py+1$ $\frac{p-1}{2}$, т.к. $y=\{1,2\ldots \frac{p-1}{2}\}$.

~~все числа b_i и b_j лежат в интервале от 2 до~~ $\cancel{\left[\left(\frac{p(p-1)}{2}+1\right):\frac{p}{2}\right]=\frac{p-1}{2}}$. ~~от 1 до $p-1$, т.к.~~

все числа b_i лежат в интервале от 2 до $p-1$, 1 не подходит, т.к. $b_i > y_i$, а ~~р~~ числа, большие p, не подходят, так как $py+1 > p(y+1)$ (если взять число, большее или равное p, то другое будет меньше либо равно y, что нельзя)

Итого чисел b всего $p-2$. В каждое произведение $py+1$ входит по 2 числа $\Rightarrow$ всего может быть $\frac{p-2}{2}$ различных чисел, что меньше количества $py+1$, ибо $\frac{p-2}{2}<\frac{p-1}{2}$. Противоречие.

$\Rightarrow$ найдётся такой y, что $py+1$ не представимо ~~в виде~~ в виде произведения 2 чисел, каждое из которых больше y.

7/7

5) Такое ~~число не~~ $py+1$ может быть полным квадратом только в случае $y = p-2$.

$py+1 = a^2$

$py = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

тогда $a \geq p-1$

Если $\underline{a = p-1}$

$(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1$

$\underline{y = p-2.}$

$p(p-2)+1 = a^2$

~~Но найдётся~~ Тогда всю $\frac{p+2}{2}$ числа переим.

но явно найдётся хотя бы одно число, которое взаимно просто с $py+1$ для любого y, это простое число, больше $\frac{p}{2}$, ~~ибо в интервале $p \dots 2p$ явно есть простое число по теореме.~~

~~Тогда это простое число, больше $\frac{py}{2}$ будет взаимно просто со всеми $py+1$.~~

Оно будет простое

Шифр: 2-11-04

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020

Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОБУ „Сертоловская СОШ №1"

Класс 11 „Б"

ФИО Лукьянов Александр Сергеевич

2-11-04

1/7

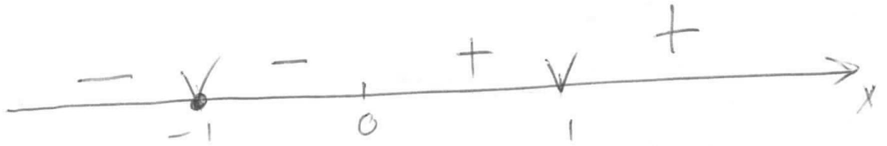
6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	7	0	21

11.6

$$((x^4+1)-(x^2+1))((x^3+1)-(x+1)) \neq$$

$$((x^4+1)-(x^2+1))((x^3+1)-(x+1)) = (x^4-x^2)(x^3-x) = x^3(x-1)^2(x+1)^2$$

$$y = x^3(x-1)^2(x+1)^2$$



Эта функция при всех положительных значениях, ~~принимает пол~~ кроме $x=1$ положительна, а в $x=1$ равна 0.

При всех отрицательных зн-иях кроме $x=-1$ отрицательна, а в $x=-1$ равна 0.

11.7.

Можно.

1) ~~Четные числа покрасим~~ ~~Рассмотрим~~ Разделим числа на 8 групп.

1) $8k$ 5) $8k+4$
2) $8k+1$ 6) $8k+5$
3) $8k+2$ 7) $8k+6$
4) $8k+3$ 8) $8k+7$

$k = \{0,1,2,3 \dots\}$.

$8k$ при $k=0$ исключаем.

2/7

2) Покрасим в 1 цвет числа:

~~8k+2, 8k+4~~ $8k+2$; $8k+4$; $8k+1$; $8k+5$.

В другой: $8k$; $8k+6$; $8k+3$; $8k+7$.

~~Числа~~

Числа разной чётности ~~можно не складывать~~ при сложении дают нечётное число, поэтому их сумма не ~~дел~~ является степенью 2.

(1 получить невозможно суммой двух нат. чисел)

~~Тогда в I группе~~

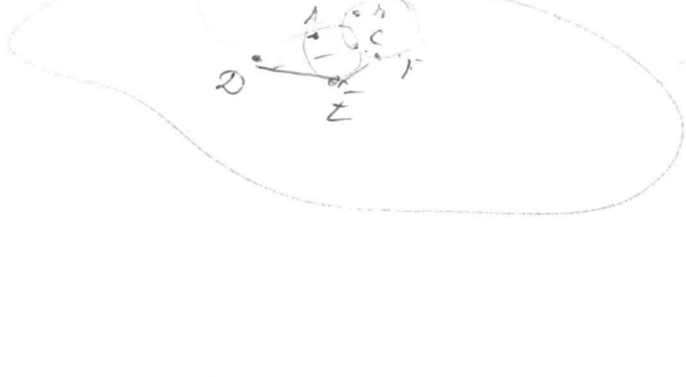
Тогда 2 числа I цвета одинаковой чётности в сумме сравнимы с 6 $n\in\{0,1,2\dots\}$ по модулю 8. Но число $8t+6 \neq 2^n$ (при $n \geq 3$ $2^n \vdots 8$, при $n=\{0;1;2\}$ $8t+6 \neq 2^n$).

$\left(\begin{array}{l} 8t+6 \neq 1 \\ 8t+6 \neq 2 \\ 8t+6 \neq 4 \end{array}\right)$

$t=\{0;1;2\dots\}$

У II цвета дают либо $8t+6$ либо $8t+10$, что тоже не является степенью 2 аналогично.

11.9.

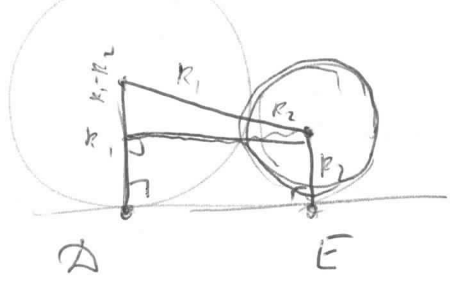


3/7

2-11-04

1) Сначала рассмотрим $\triangle DEF$.

~~Пусть~~ друг друга касаются сферы радиусами R_1 и R_2.

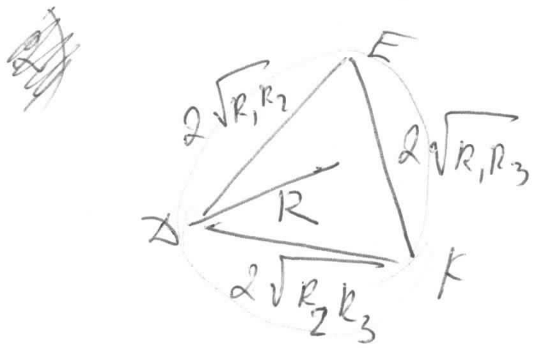


Тогда $DE=\sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2}=2\sqrt{R_1R_2}$

Аналогично:

$EF=2\sqrt{R_2R_3}$

$DF=2\sqrt{R_1R_3}$.



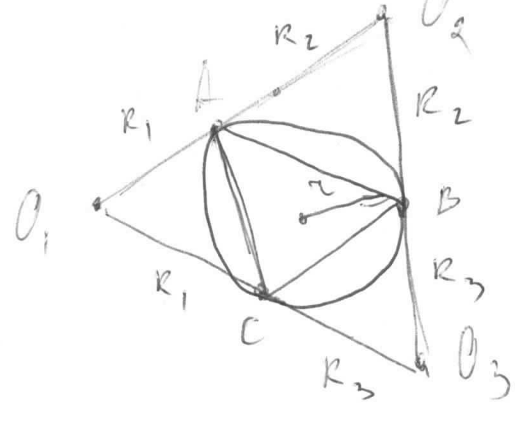
$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S_\Delta=\dfrac{abc}{4R}$.

$$\frac{8R_1\cdot R_2\cdot R_3}{4R}=\sqrt{\left(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}\right)\left(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}-\sqrt{R_1R_3}\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\left(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_2R_3}\right)\left(\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_1R_2}\right)}$$

2) $\triangle ABC$



$O_1O_2O_3$ — центры сфер.

Т.к. $O_2A=O_2B$ и $BO_3=O_3C$, $O_1A=O_1C$, то A, B и C — точки касания вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$ окружности, также она описана вокруг $\triangle ABC$.

4/7

$\boxed{2-11-04}$

$$S_{O_1O_2O_3} = (R_1+R_2+R_3)r = \frac{1}{2}Pr$$

$$S_{O_1O_2O_3} = \sqrt{(R_1+R_2+R_3)R_1R_2R_3}$$ — по ф-ле Герона

$$\cancel{r = \sqrt{R_1R_2R_3}} \qquad r = \sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

3) Пусть x, y, z — стороны треугольника.

Тогда:

$$xyz \geq \overset{t}{(x+y-z)}\,\overset{m}{(x+z-y)}\,\overset{k}{(y+z-x)}$$

(~~О Иванов~~, ~~"Элементарная математика"~~)

докажем.

$x = \frac{t+m}{2}$ $\quad t, m, k > 0$ по нер-ву Δ"

$y = \frac{t+k}{2}$

$z = \frac{m+k}{2}$

$$\frac{t+m}{2} \geq \sqrt{tm}$$

$$\frac{m+k}{2} \geq \sqrt{mk}$$

$$\frac{t+k}{2} \geq \sqrt{tk}$$

Перемножив, получаем

$$\frac{t+m}{2} \cdot \frac{m+k}{2} \cdot \frac{t+k}{2} \geq tmk.$$

ч.т.д.

5/7

$\boxed{2\text{-}11\text{-}04}$

4)

$$\left(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_2R_3}\right)\left(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}-\sqrt{R_1R_3}\right)\left(\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_1R_2}\right)$$

$$\leq R_1R_2R_3.$$

$$\left(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}\right)\leq \frac{R_1+R_2}{2}+\frac{R_2+R_3}{2}+\frac{R_1+R_3}{2}.$$

$$\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}\leq R_1+R_2+R_3$$

5) $$S_{DEF}\leq\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}$$

$$\frac{8R_1R_2R_3}{4R}\leq\sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}$$

$$R\geq 2\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

$$r=\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}\Rightarrow R>r.$$

ч.т.д.

11.~~7~~

6/7

2-11-04

$\sin x+\cos y$ и $\sin y+\cos x$ — рац. полож. числа.

Значит сумма их квадратов рациональна и положительна.

$$(\sin x+\cos y)^2+(\sin y+\cos x)^2 = 2+2\sin(x+y)$$

$\Rightarrow$ ~~$\sin(x+y)$ — рац. числа.~~ $\sin(x+y)$ — рац. число.

рац.

$$(\sin x+\cos y)(\sin y+\cos x)=\sin x\sin y+\sin x\cos x+$$
$$+\cos y\sin y+\cos y\cos x=\cos(y-x)+\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)=$$
$$=\cos(y-x)+\cos(y-x)\sin(y+x)=\underbrace{\cos(y-x)}_{\text{рац. и полож.}}\underbrace{(1+\sin(y+x))}_{\text{рац}}$$

$\cos(x-y)$ — рационально.

$$(\sin x+\cos y)^2-(\sin y+\cos x)^2=\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 y-\sin^2 x+$$
$$+2\sin x\cos y-2\sin y\cos x=\cos 2y-\cos 2x-$$
$$-2\sin(x-y)=\underbrace{2\sin(x+y)}_{\text{рац}}\sin(x-y)+2\sin(x-y)$$

$\Rightarrow \sin(x-y)$ — рац.

↓

11. 10.

~~Оче~~

ax^2+bx+c задаётся тремя числами.

Очевидно, что в одну точку говорить бесполезно, т. к. Петя может называть одно и то же число.